

简单的答案解析

2021 年 7 月 5 日

一

1. B

2. $0.8 \frac{\lambda+1}{k^2} p_{k-1} - 0.25 p_{k-2} = \frac{0.6k+1}{2^k}$

3. ARIMA(0,1,1)

4. A

5. $\frac{2}{1+3^{-p}}$

6. $\frac{\min\{t,s\}}{\sqrt{ts}}$

7. $\begin{cases} \sigma^2(1+b_1^2+\dots+b_{l-1}^2), & l \leq q \\ \sigma^2(1+b_1^2+\dots+b_q^2), & l > q \end{cases}$

8. $\frac{7}{32}$

9. 236.3 285.95

10. $-1 < \theta_2 < 0$

题干改为 $(1-0.8L+0.64L^2)$

二 (1) $A(z) = 1 - 0.8z + 0.64z^2$, $a_1 = 0.8, a_2 = -0.64$ 则 $|a_2| < 1, a_2 \pm a_1 < 1$, 该模型平稳

令 $e_t = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$, 则 $X_t = aX_{t-1} - a^2X_{t-2} + e_t$, 其中 $a = 0.8$

设 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^* e_{t-j}$, 则有

$$\psi_0^* = 1$$

$$\psi_j^* = a\psi_{j-1}^* - a^2\psi_{j-2}^*$$

$$= \begin{cases} (-1)^n a^j, & j = 3n \\ (-1)^n a^j, & j = 3n+1 \\ 0, & i = 3n+2 \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{3n} e_{t-3n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{3n+1} e_{t-3n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{3n} (\varepsilon_{t-3n} - 0.4\varepsilon_{t-3n-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{3n+1} (\varepsilon_{t-3n-1} - 0.4\varepsilon_{t-3n-2}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n} \varepsilon_{t-3n} + 0.4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n} \varepsilon_{t-3n-1} - 0.4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n+1} \varepsilon_{t-3n-2} \end{aligned}$$

即设传递形式为 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, 有:

$$\psi_j = \begin{cases} (-1)^n 0.8^j, & j = 3n \\ 0.4(-1)^n 0.8^j, & j = 3n + 1 \\ 0.4(-1)^n 0.8^{j+1}, & j = 3n + 2 \end{cases}$$

另解: 由前文中 Wold 系数的递推式, 考虑对应线性差分方程的特征多项式

$$\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.64 = 0.$$

其根为

$$\lambda_1 = 0.4 - 0.4\sqrt{3}i, \lambda_2 = 0.4 + 0.4\sqrt{3}i.$$

则该差分方程的通解为 $\psi_j = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j$

由 $\psi_0 = 1, \psi_1 = 0.4$, 解得 $c_1 = c_2 = 0.5$, 故 $\psi_j = \frac{0.4^j}{2} [(1 - \sqrt{3}i)^j + (1 + \sqrt{3}i)^j]$

(2) 由于 $\varepsilon_t = \frac{A(L)}{B(L)} X_t = X_t - 0.4X_{t-1} + 0.48 \sum_{j=2}^{\infty} 0.4^j X_{t-j}$

则 X_{t+l} 的最佳线性预测为:

$$\begin{aligned} L(X_{t+l}|X_t, \dots) &= \sum_{j=0}^l \psi_j \hat{\varepsilon}_{t+l-j} \\ &= \sum_{j=0}^l \psi_j (X_{t-j} - 0.4X_{t-1-j} + 3 \sum_{k=2}^{\infty} 0.4^k X_{t-j-k}) \end{aligned}$$

从而 $X_{t+l} - L(X_{t+l}|X_t, \dots) = \sum_{j=0}^l \psi_j \varepsilon_{t+l-j}$

故 X_{t+l} 的 95% 置信区间为

$$\left[L(X_{t+l}|X_t, \dots) - 1.96\sigma \sqrt{\sum_{j=0}^l \psi_j^2}, L(X_{t+l}|X_t, \dots) + 1.96\sigma \sqrt{\sum_{j=0}^l \psi_j^2} \right]$$

(3) X_t 的谱密度为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|1 - 0.4e^{-i\lambda}|^2}{|1 - 0.8e^{-i\lambda} + 0.64e^{-2i\lambda}|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1.16 - 0.8 \cos \lambda}{3.0496 + 1.28 \cos 2\lambda + 0.512 \cos \lambda} \end{aligned}$$

三

(1) 移项后有 $\hat{X}_t(l) = a\hat{X}_t(l) - \frac{a^2}{4}\hat{X}_t(l-1)$. 易知 $\hat{X}_t(l) - \frac{a}{2}\hat{X}_t(l)$ 是一个公比 $q = \frac{a}{2}$ 的等比数列. 计算整理后可得

$$\hat{X}_t(l) = \left(\frac{a}{2}\right)^l \left((l+1)X_t - \frac{la}{2}X_{t-1} \right)$$

(2)

$$\begin{aligned} E[e_t(l)^2] &= E(X_{t+l} - \hat{X}_t(l))^2 \\ &= E(X_{t+l} - (l+1)\left(\frac{a}{2}\right)^l X_t + l\left(\frac{a}{2}\right)^{l+1} X_{t-1})^2 \\ &= (1 + (l+1)^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{2l} + l^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{2l+2}) \gamma_0 + 2l \left(\frac{a}{2}\right)^{l+1} \gamma_{l+1} \\ &\quad - 2(l+1) \left(\frac{a}{2}\right)^l \gamma_l - 2l(l+1) \left(\frac{a}{2}\right)^{2l+1} \gamma_1 \end{aligned}$$

(3) 由于 $|a| < 2$,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} E[e_t(l)^2] = \gamma_0.$$

四

(1) 证明是线性平序列

不妨先假设 $m > n$, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 则有

$$\begin{aligned} \|Y_m - Y_n\|_2^2 &= \left\| \sum_{n < j \leq m} h_j X_{t-j} \right\|_2^2 = \sum_{n < i, j \leq m} h_i h_j \langle X_{t-i}, X_{t-j} \rangle \\ &= \sum_{n < i, j \leq m} h_i h_j \gamma(i-j) \leq \gamma(0) \sum_{n < i \leq m} |h_i|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EY_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} EY_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E \sum_{j=0}^n h_j X_{t-j} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n h_j EX_{t-j} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} h_j EX_{t-j} = EX_t \sum_{j=0}^{+\infty} h_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_t Y_{t+h}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=0}^n h_j X_{t-j}, \sum_{j=0}^n h_j X_{t+h-j} \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^n h_i h_j \langle X_{t-i}, X_{t+h-j} \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^n h_i h_j \gamma(h+i-j) \end{aligned}$$

因为 X_t 是平稳的, 故而 $E(Y_t Y_{t+h})$ 只依赖于 h , 因此 Y_t 是平稳的。

(2) 计算谱密度

直接使用书本上 (7.11) 公式, 可以得到绝对可和的保时线性滤波器的谱密度为:

$$f_Y(\lambda) = |H(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda).$$

其中 $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j$, $|z| \leq 1$.

由于 $|\phi| < 1$, $\{X_t\}$ 是平稳的, 因此

$$EX_t = 0, \quad \gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma^2$$

因此得到 $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$.

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_{t+h} X_t) \\ &= E[(\varepsilon_{t+h} + \phi \varepsilon_{t+h-1} + \cdots + \phi^h \varepsilon_t + \cdots)(\varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \cdots)] \\ &= \phi^h (1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots) \sigma^2 \\ &= \frac{\phi^h}{1 - \phi^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

因此, 自相关系数为 $\rho(h) = \phi^h$, 则

$$f_X(\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\lambda} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2)^{-1}$$

或者直接套用书本上的推论 3.2, 可以直接得出

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\lambda} = \frac{\sigma^2}{2\pi|1 - \phi_1(e^{i\lambda})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2)^{-1}.$$

五

(1) 计算谱密度函数

AR(p) 模型的谱密度函数为:

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega}.$$

按照上面思路求出来自相关函数就可以。

此外, 书本上 p67 有推论 3.2, AR(p) 有谱密度:

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega} = \frac{\sigma^2}{2\pi|A(e^{i\omega})|^2}.$$

在这道题目中, $A(z) = 1 - a_1 z - \dots - a_p z^p$.

(2) 验证是 MA(p) 序列

首先, 知道 Y 的谱密度函数为

$$f_Y(\omega) = \frac{1}{4\pi^2 f_Y(\omega)} = \frac{|A(e^{i\omega})|^2}{2\pi\sigma^2}.$$

利用 p90 的定理 1.1 可以得到这个就是 MA (p) 序列的谱密度函数形式, 因此得到 Y_t 是一个 MA (p) 序列。

(3) 注意是计算相关函数, 不是自协方差函数

由前面验证的谱密度函数可以直接得出来

$$Y_t = A(B)\epsilon_t = \epsilon_t - a_1\epsilon_{t-1} - \dots - a_p\epsilon_{t-p}.$$

计算相关系数就可以。计算得出:

$$\gamma_k = 0, |k| > p$$

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{p-k} a_j a_{j+k} \text{ (where } a_0 = 1), 0 \leq k \leq p$$

就可以的计算出来自相关函数 (注意上面, 当 $-p \leq k < 0$ 时, 需要把上面的表达式 k 换成 $-k$)。

或者利用谱密度函数的定义:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda$$

来计算自协方差函数。